INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE - NANCY -

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES - SESSION 95 -

Durée : 4 heures

Partie 1

• On rappelle les résultats classiques suivants, dont la démonstration n'est pas demandée

1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

$n \in \mathbb{N}$.

2) $$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^n\, dt = n!$$

• On ne cherchera pas à justifier les opérations d'intégration terme à terme dans les questions [4] et [6].

[1] Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$ch(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}.$$

• Tracer le graphe de $ch(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

• Donner le développement en série entière de $ch(z)$, en précisant son rayon de convergence.

• Trouver une relation entre $ch(it)$ et $\cos t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

[2] • Déterminer, sous la forme d'une série entière, la solution J de l'équation différentielle

$$xy''+y'+xy = 0$$

qui satisfait à la condition initiale

$$J'(0) = 0, \qquad J(0) = 1.$$

• Préciser la valeur du rayon de convergence de la série obtenue.

• Pouvait-on prévoir la parité de la fonction obtenue ?

[3] • Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|J(x)| \leq ch(x)$$

• En déduire que, pour tout $\lambda > 1$, l'intégrale généralisée $\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} J(x)dx$ est convergente.

[4] • Rappeler le développement en série entière de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$, en précisant son rayon de convergence.

• A l'aide d'une intégration terme à terme, montrer que, pour tout $\lambda > 1$, on a

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} J(x)dx = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

[5] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $I(x) = J(ix)$.

• Montrer que, pour tout x réel, $I(x) > 0$.

• Déterminer une équation différentielle à laquelle obéit I.

6 • Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$J(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin t)dt$$

• Trouver une formule intégrale analogue pour $I(x)$.

7 • Soit K une autre solution de l'équation différentielle

$$xy''+y'+xy = 0$$

sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

• Montrer que la fonction $W = J'K-JK'$ satisfait à l'équation différentielle

$$xW'+W = 0.$$

• En déduire une relation intégrale entre K et J.

Partie 2

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.

1 • Rappeler en quoi consiste la loi exponentielle et la loi de Poisson.

• Donner au moins un exemple dans chaque cas de situations qui conduisent à considérer une variable aléatoire obéissant à de telles lois.

2 Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle, de paramètre λ.

• Montrer que la variable aléatoire $S_2 = X_1+X_2$ admet une loi de densité $\lambda^2 x\, e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

• Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_n = X_1+...+X_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre a. On considère sur Ω la variable aléatoire S définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = \sum_{i=1}^{1+Y(\omega)} X_i(\omega).$$

A quelle condition peut-on écrire, pour $0 \leq \alpha < \beta$ donnés

$$\mathbb{P}(S \in [\alpha,\beta]) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_1+...+X_n \in [\alpha,\beta]).\mathbb{P}(Y = n-1) ?$$

4 Sous la condition précédente, exprimer la densité de la variable aléatoire S à l'aide des paramètres λ, a et de la fonction I définie dans la partie I - 5 .

5 Calculer l'espérance de S

• à l'aide de la question précédente (on ne cherchera pas à justifier l'intégration terme à terme).

• en s'aidant de la notion de probabilité conditionnelle.

6 Déterminer l'écart-type de S.